CPP - 1A - Mécanique - 16 Décembre 2011

I - Question de cours

a) Un référentiel galiléen est en translation rectiligne et uniforme par rapp[ort] à un autre référentiel galiléen.

On peut citer : le réf de Copernic ou de Kepler (centre = c du syst. solaire ou c du [Soleil] et 3 axes définis par 3 étoiles "éloignées"), le ref géocentrique (centre de la Terre et 3 [axes] déf. par 3 étoiles) ou ref terrestre (pt de la surface terrestre + vert. asc, nord, est) suiva[nt] les conditions de manipulations (durée de l'exp court devant période révolution Terre...

b) $\vec{v_e}(M,R'/R) = \vec{v}(O'\in R'/R) + \vec{\Omega}(R'/R)\times\vec{O'M}$ et O' origine de R'

$\vec{a_e}(M,R'/R) = \vec{a}(O'\in R'/R) + \left[\frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt}\right]_R \times \vec{O'M} + \vec{\Omega}(R'/R)\times\left[\vec{\Omega}(R'/R)\times\vec{O'M}\right]$

$\vec{a}_c(M,R'/R) = 2\vec{\Omega}(R'/R)\times\vec{v}(M/R')$

c) LCV : $\vec{v}(M/R) = \vec{v}(M/R') + \vec{v_e}(M,R'/R)$

LCA : $\vec{a}(M/R) = \vec{a}(M/R') + \vec{a_e}(M,R'/R) + \vec{a_c}(M,R'/R)$

II - RFD

a) $HA = a\sin\omega t$

b) $HA = l\sin\alpha$ et $HM = l\cos\alpha = l\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{l^2 - HA^2} = \sqrt{l^2 - a^2\sin^2\omega t}$

c) $x = OM = OH + HM = a\cos\omega t + \sqrt{l^2 - a^2\sin^2\omega t}$

d) $\sum \vec{F}^{ext}(M/R) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \underbrace{\vec{P}}_{\parallel \vec{e}_y} + \underbrace{R\vec{e}_y}_{\text{car s.s frott}} + (F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y) = m\vec{a}(M/R) = m\ddot{x}\,\vec{e}_x$

e) Donc, par projection sur $\vec{e}_x$: $F_x = m\ddot{x}$

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega\sin\omega t + \frac{-a^2\cancel{2}\omega\sin\omega t\cos\omega t}{\cancel{2}\sqrt{l^2-a^2\sin^2\omega t}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\cos\omega t - a^2\omega\left[\frac{\omega(\cos^2\omega t - \sin^2\omega t)}{\sqrt{l^2-a^2\sin^2\omega t}} + \frac{\sin\omega t\cos\omega t\left(-\frac{1}{2}\right)(-2a^2\omega\sin\omega t\cos\omega t)}{(l^2-a^2\sin^2\omega t)^{3/2}}\right]$$

$$= -a\omega^2\cos\omega t - a^2\omega^2\left[\frac{\cos 2\omega t}{\sqrt{l^2-a^2\sin^2\omega t}} + \frac{a^2\sin^2\omega t\cos^2\omega t}{(l^2-a^2\sin^2\omega t)^{3/2}}\right]$$

$$\Rightarrow F_x = m\ddot{x} = -ma\omega^2\left[\cos\omega t + \frac{a\cos 2\omega t(l^2-a^2\sin^2\omega t) + a^3\sin^2\omega t\cos^2\omega t}{(l^2-a^2\sin^2\omega t)^{3/2}}\right]$$

$$= -ma\omega^2\left[\cos\omega t + \frac{al^2\cos 2\omega t + a^3\sin^4\omega t}{(l^2-a^2\sin^2\omega t)^{3/2}}\right]$$

f) $a \ll l \Rightarrow a^2\sin^2\omega t \ll l^2 \Rightarrow F_x \simeq -ma\omega^2\left[\cos\omega t + \frac{a(l^2\cos 2\omega t + \cancel{a^2\sin^4\omega t})}{l^3}\right]$

$\Rightarrow F_x \simeq -ma\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{a}{l}\cos 2\omega t\right) \simeq -ma\omega^2\cos\omega t$

g) $F_x = m\ddot{x} = -ma\omega^2\cos\omega t \Rightarrow \ddot{x} = -a\omega^2\cos\omega t \Rightarrow x(t) = a\cos\omega t + cte$

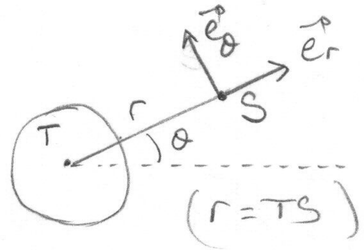
$A\in[OM] \Rightarrow A, O$ et M sont alignés $\Rightarrow x(0) = a + l \Rightarrow cte = l$

Alors, $x(t) = l + a\cos\omega t$.

III - Interaction newtonienne

a) $\sum \vec{F}(S/R) = m\vec{a}(M/R) \iff \vec{F_{int}} = -\dfrac{GmM}{R^2}\vec{e_r} = -mg_0\vec{e_r}$

$\Rightarrow g_0 = \dfrac{GM}{R^2}$



b) $\left[\dfrac{d\vec{\mathcal{L}_T}(S/R)}{dt}\right]_R = \vec{m_T}(\vec{F_{int}}) = \vec{TS} \times \vec{F_{int}} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{\mathcal{L}_T}(S/R) = \vec{cte} = m\vec{TS} \times \vec{v}(S/R)$

$= mr\vec{e_r} \times (\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z} \Rightarrow C = \dfrac{\|\mathcal{L}_T\|}{m} = r^2$ [illegible]

$\vec{\mathcal{L}_T} = \vec{cte} \Rightarrow \vec{r}$ et $\vec{v} \in$ tjs à un m̂ plan $\Rightarrow$ mvt plan, ds le plan $\ni T$

c) $\dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{d(\frac{1}{r})}{d\theta} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta} \Rightarrow \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = -r^2\dfrac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -C\dfrac{du}{d\theta}$

$\mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \dfrac{1}{2}m\left[C^2\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 + \dfrac{C^2}{r^2}\right] = \dfrac{mC^2}{2}\left[\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 + u\right.$ [illegible]

d) $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c$ et $\vec{F_{int}} = -\vec{grad}\,\mathcal{E}_p = -\dfrac{GmM}{r^2}\vec{e_r} \Rightarrow \mathcal{E}_p = -\dfrac{GmM}{r}$

Donc $\mathcal{E}_m = -GmMu + \dfrac{mC^2}{2}\left[\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = -mg_0R^2u + \dfrac{mC^2}{2}\left[\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right.$ [illegible]

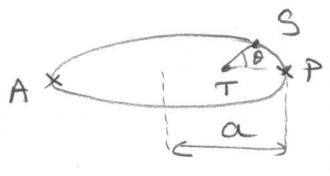
e) TPM : $\dfrac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}^{\vec{F}_{nconsv}} = 0$ (seule force $= \vec{F_{int}}$ qui est conservative).

Or, $\dfrac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \dfrac{d\mathcal{E}_m}{d\theta}\dot{\theta} \Rightarrow \dfrac{d\mathcal{E}_m}{d\theta} = 0 = -\cancel{m}g_0R^2\cancel{\dfrac{du}{d\theta}} + \dfrac{\cancel{m}C^2}{2}\left[2\dfrac{du}{d\theta}\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + 2u\cancel{\dfrac{du}{d\theta}}\right]$

$\Rightarrow g_0R^2 = C^2\left[\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] \iff \dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \dfrac{g_0R^2}{C^2}$

Donc $u = A\cos\theta + \dfrac{g_0R^2}{C^2} = \dfrac{g_0R^2}{C^2}\left[1 + \dfrac{AC^2}{g_0R^2}\cos\theta\right] = \dfrac{1}{r}$

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ avec $p = \dfrac{C^2}{g_0R^2}$ et $e = \dfrac{AC^2}{g_0R^2}$



f) $r_P = R + z_P = r(\theta = 0) = \dfrac{p}{1+e}$

g) $r_A = R + z_A = r(\theta = \pi) = \dfrac{p}{1-e}$

$\Rightarrow \begin{cases} z_P = \dfrac{p}{1+e} - R \\ z_A = \dfrac{p}{1-e} - R \end{cases}$

h) $\begin{cases} 1+e = \dfrac{p}{r_P} \\ 1-e = \dfrac{p}{r_A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p}{r_P} + \dfrac{p}{r_A} = 2 \\ 1 - \dfrac{p}{r_A} = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{2r_Ar_P}{r_A + r_P} = 9{,}13 \cdot 10^3 \text{ km} \\ e = 1 - \dfrac{2r_P}{r_A + r_P} = \dfrac{r_A - r_P}{r_A + r_P} = 0{,}242 \end{cases}$

$a = \dfrac{1}{2}(r_A + r_P) = 9{,}70 \cdot 10^3$ km.

i) $\dfrac{d\mathcal{A}}{dt} = \dfrac{1}{2}C = \dfrac{\pi ab}{T} \Rightarrow T = 2\pi\dfrac{ab}{C}$

$\Rightarrow T^2 = 4\pi^2\dfrac{a^2b^2}{C^2} = 4\pi^2\dfrac{a^2b^2}{g_0R^2p} = \dfrac{4\pi^2a^3}{g_0R^2} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{R}\sqrt{\dfrac{a^3}{g_0}} = 9470\text{ s} = 2\text{ h }38\text{ min}$